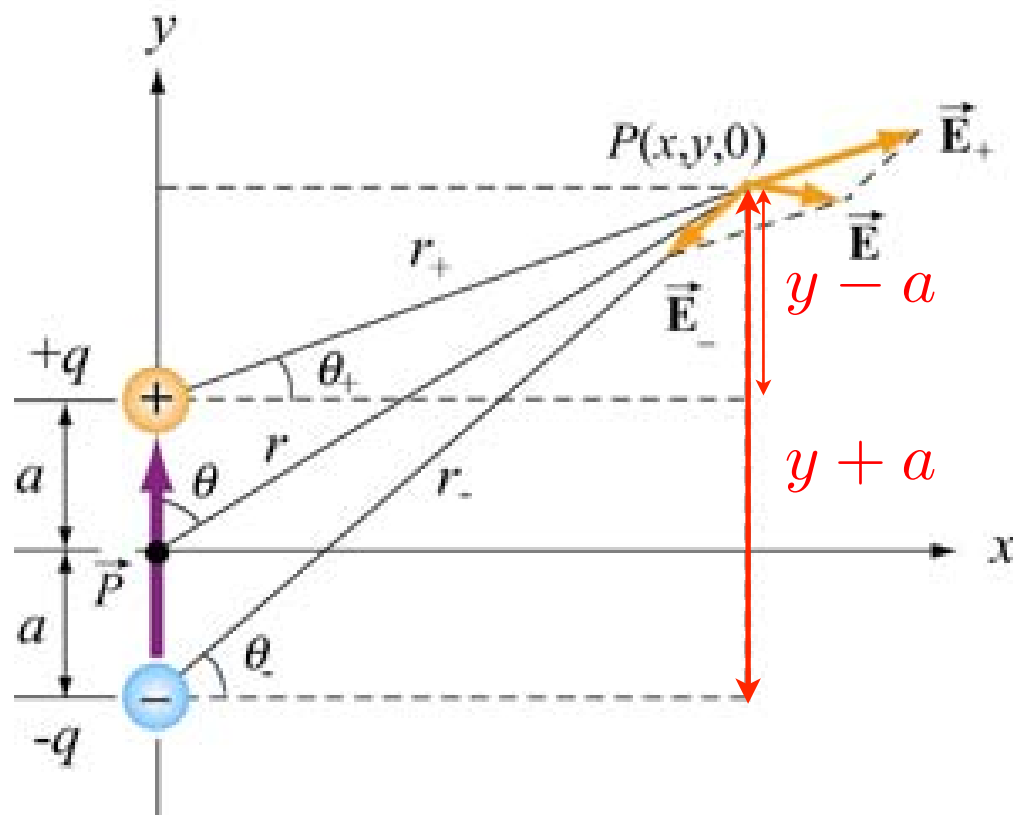


Distribuição discreta de cargas

Cálculo do campo elétrico produzido por um dipolo elétrico em um ponto P situado no plano xy



$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

$$E_x = E_x^+ - E_x^-$$

$$E_y = E_y^+ - E_y^-$$

$$E_x^+ = E_+ \cos \theta_+$$

$$E_x^- = E_- \cos \theta_-$$

$$E_y^+ = E_+ \sin \theta_+$$

$$E_y^- = E_- \sin \theta_-$$

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_+^2}$$

$$E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_-^2}$$

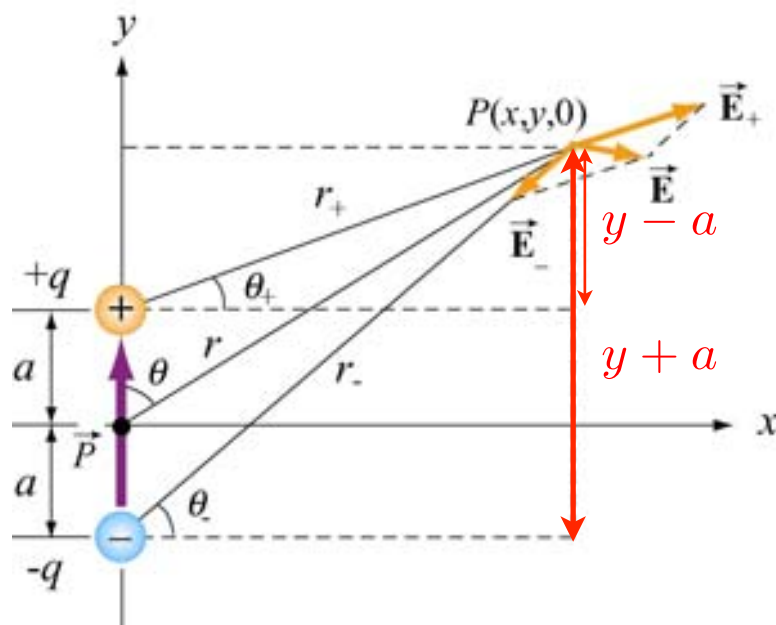
$$\cos \theta_+ = \frac{x}{r_+}; \quad \sin \theta_+ = \frac{y - a}{r_+}$$

$$\cos \theta_- = \frac{x}{r_-}; \quad \sin \theta_- = \frac{y + a}{r_-}$$

$$r_{\pm}^2 = x^2 + (y \mp a)^2$$

Campo de um dipolo elétrico

Cálculo do campo elétrico produzido por um dipolo elétrico em um ponto P situado no plano xy



$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}$$

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos\theta_+}{r_+^2} - \frac{\cos\theta_-}{r_-^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{[x^2 + (y-a)^2]^{3/2}} - \frac{x}{[x^2 + (y+a)^2]^{3/2}} \right)$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sin\theta_+}{r_+^2} - \frac{\sin\theta_-}{r_-^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{y-a}{[x^2 + (y-a)^2]^{3/2}} - \frac{y+a}{[x^2 + (y+a)^2]^{3/2}} \right)$$

Campo de um dipolo elétrico

Escrevemos $[x^2 + (y \pm a)^2]^{-3/2} = [x^2 + y^2 + a^2 \pm 2ay]^{-3/2} = r^{-3} \left[1 + \frac{a^2 \pm 2ay}{r^2} \right]^{-3/2}$

Chamando $s \equiv (a^2 \pm 2ay)/r^2$, no limite em que $r \gg a$ podemos expandir

$$(1 + s)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}s + \frac{15}{8}s^2 - \dots$$

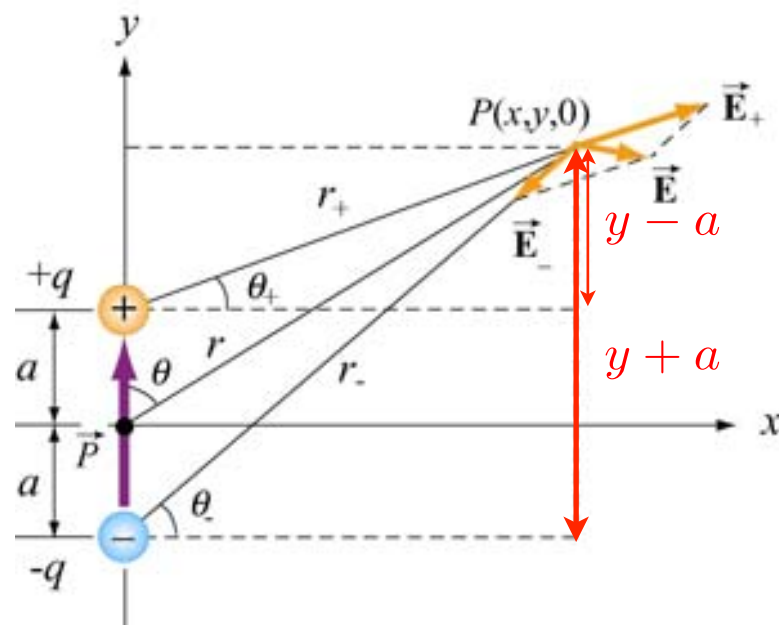
Retendo termos até primeira ordem em s obtemos:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{6xya}{r^5} + \dots \quad E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2a}{r^3} + \frac{6y^2a}{r^5} \right) + \dots$$

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{2a}{r^3} \hat{x} + \frac{6ya}{r^5} (x\hat{x} + y\hat{y}) \right] = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\frac{3yx}{r^2} \hat{x} + \left(\frac{3y^2}{r^2} - 1 \right) \hat{y} \right]$$

onde $p = 2aq$. Usando que $\sin \theta = \frac{x}{r}$ e $\cos \theta = \frac{y}{r}$ obtemos:

Campo de um dipolo elétrico



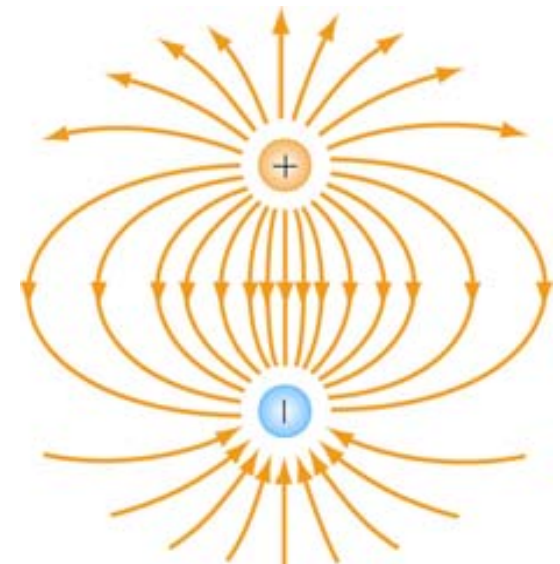
No limite em que $r \gg a$ podemos expressar

$$E_x = \frac{3p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta \cos \theta$$

$$E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

onde $\vec{p} = 2aq \hat{y}$ é denominado momento de dipolo elétrico

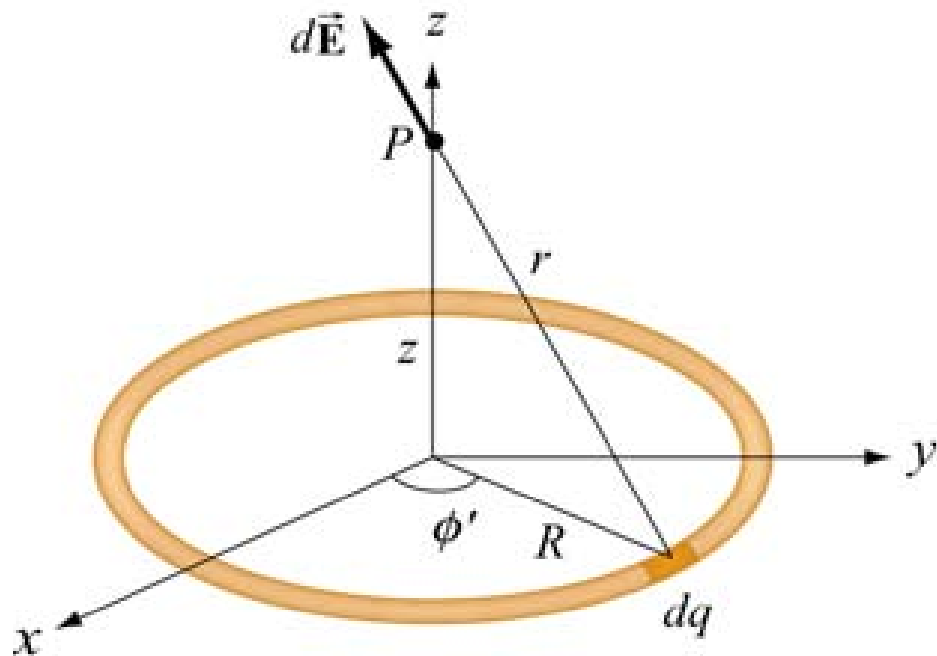
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right)$$



Distribuição contínua de cargas

Cálculo do campo elétrico produzido por um anel de raio R , uniformemente carregado com carga Q . Campo calculado em um ponto P situado a uma distância z do centro do anel, sobre um eixo perpendicular ao plano do anel, passando por seu centro.

Estratégia: repartimos o anel em elementos infinitesimais, calculamos a contribuição devido a cada um desses elementos e somamos sobre todos os elementos que compõem o anel.

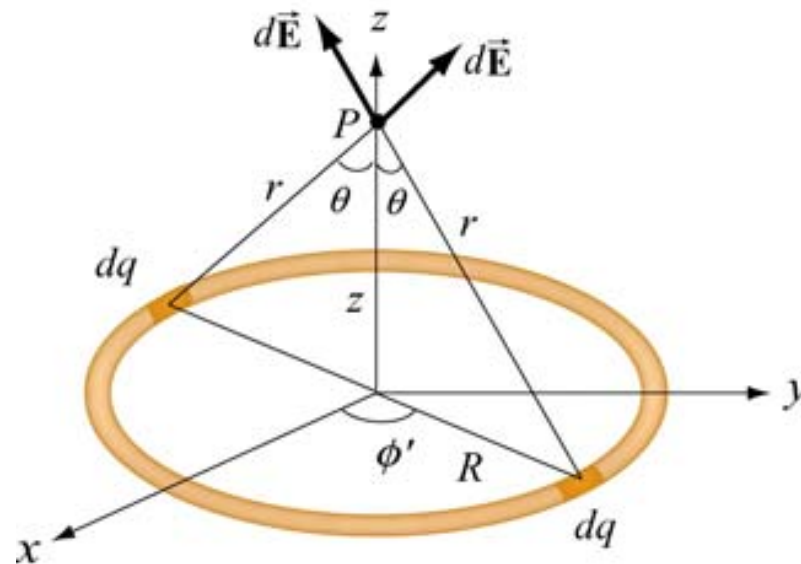


$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}; \quad dq = \lambda d\ell$$

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{r^2} \hat{r}; \quad \vec{E} = \int_{anel} d\vec{E}$$

$$\vec{E} = \int_{anel} dE_x \hat{x} + \int_{anel} dE_y \hat{y} + \int_{anel} dE_z \hat{z}$$

Campo elétrico produzido por um anel

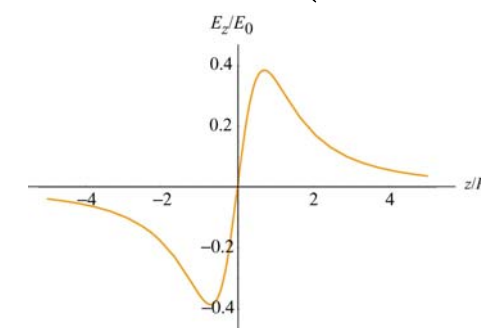


Por simetria somente a componente z sobrevive: $\int_{anel} dE_x \hat{x} = \int_{anel} dE_y \hat{y} = 0$

$$dE_z = dE \cos\theta = k \frac{\lambda d\ell}{R^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$E_z = \int_{anel} dE_z = k \frac{\lambda z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_{anel} d\ell = k \frac{\lambda z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} 2\pi R = k \frac{Q z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

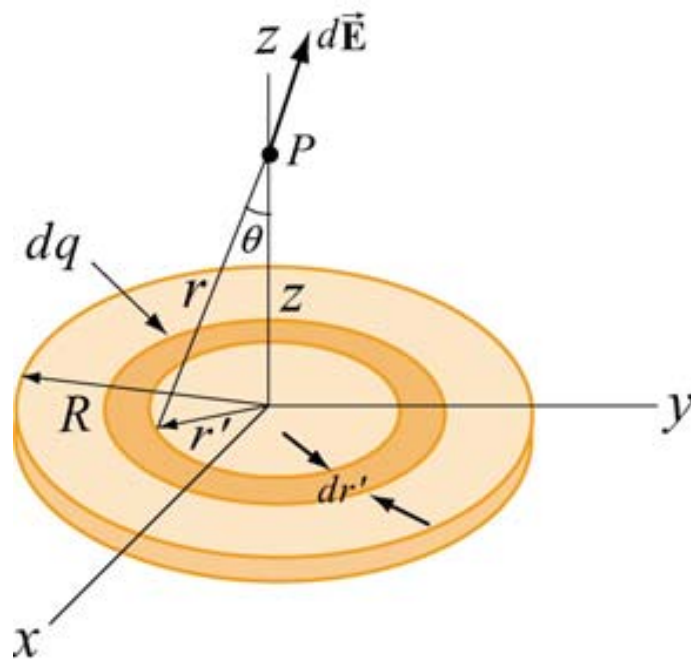
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$



Campo elétrico produzido por um disco

Cálculo do campo elétrico produzido por um disco de raio R , uniformemente carregado com carga Q , calculado em um ponto P situado a uma distância z do centro do disco, sobre um eixo perpendicular ao plano do disco, passando por seu centro.

Estratégia: repartimos o disco em anéis infinitesimais, calculamos a contribuição devido a cada anel e somamos sobre todos os anéis que compõem o disco.



$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}; \quad dq = \sigma(2\pi r' dr')$$

Por simetria somente a componente z sobrevive:

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq z}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma z(2\pi r' dr')}{(r'^2 + z^2)^{3/2}}$$

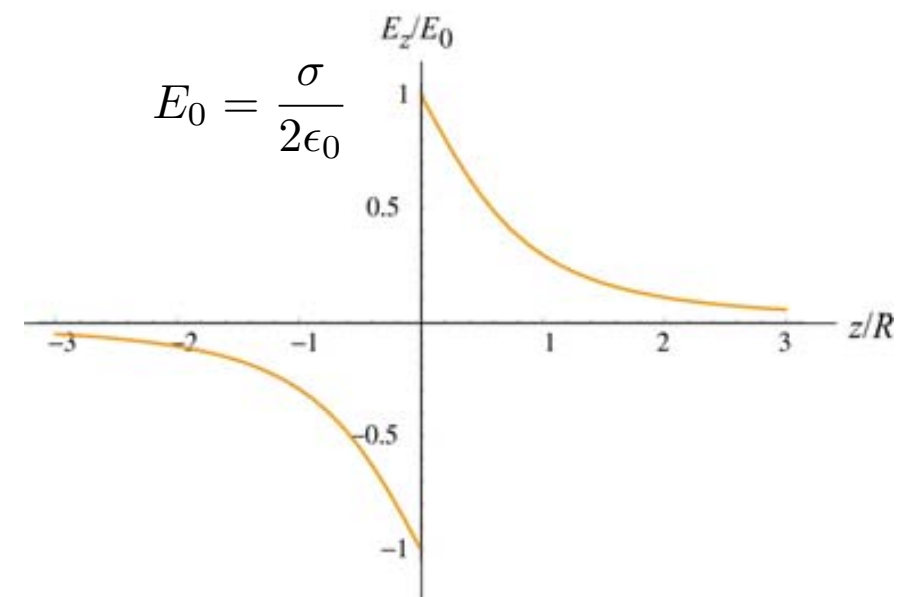
$$E_z = \int_{\text{disco}} dE_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_{z^2}^{R^2 + z^2} \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \frac{u^{-1/2}}{(-1/2)} \Big|_{z^2}^{R^2 + z^2}$$

Campo elétrico produzido por um disco

$$E_z = -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]$$

O resultado pode ser expresso na seguinte forma:

$$E_z = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right], & z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[-1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right], & z < 0 \end{cases}$$



Alguns limites:

$$\lim_{z \gg R} 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} = 1 - \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{-1/2} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} + \dots \right) \approx \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2}$$

$$\lim_{x \ll 1} (1 + x)^n \approx 1 + nx$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{2z^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma\pi R^2}{z^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2}$$

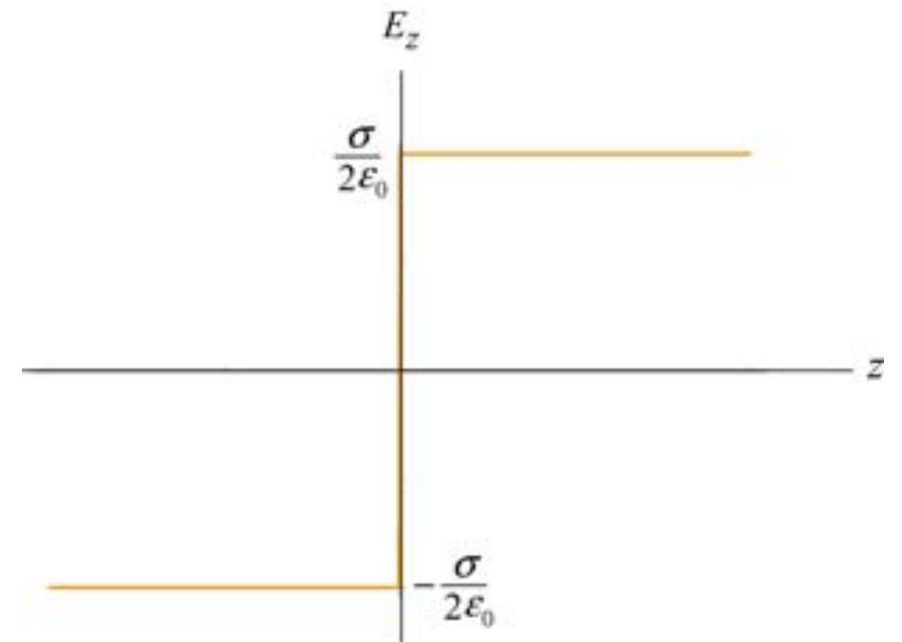
Campo de uma
carga pontual

Campo elétrico produzido por um plano infinito uniformemente carregado

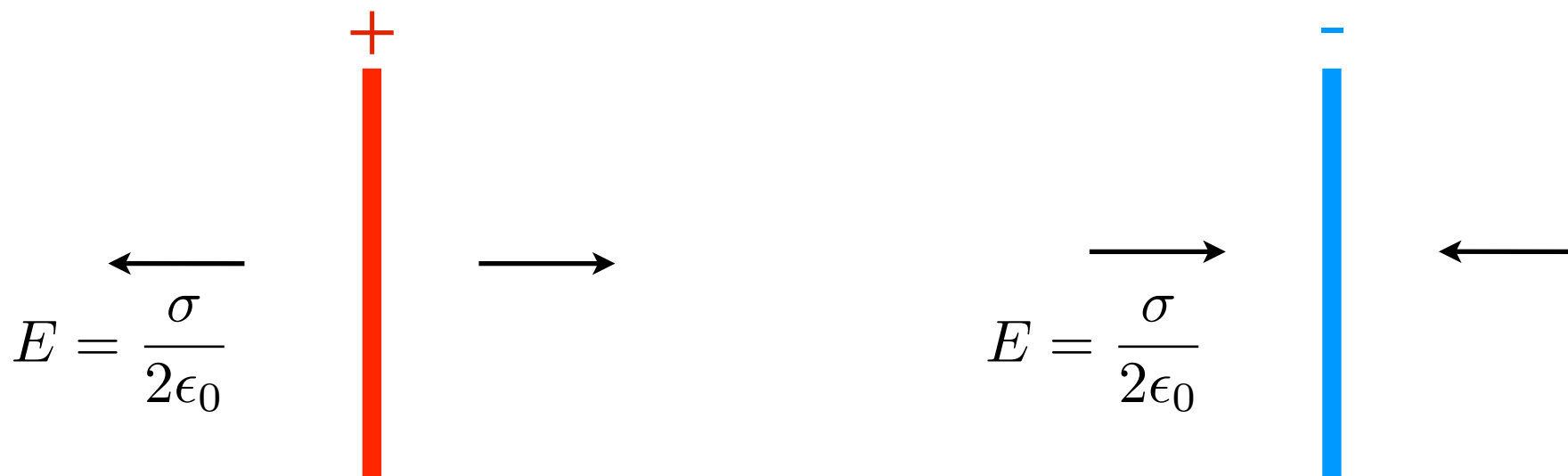
Limite oposto: $\lim R \gg z$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (z > 0)$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[-1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \approx -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (z < 0)$$

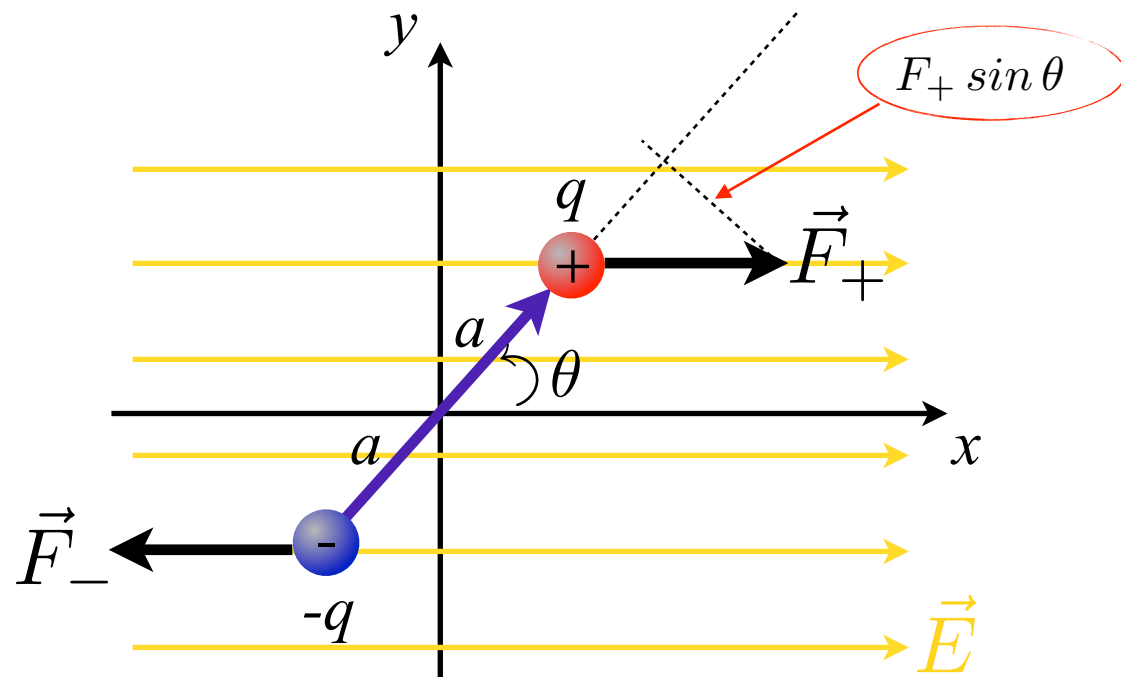


O campo elétrico produzido por um plano infinito, uniformemente carregado com densidade superficial de carga σ tem módulo constante e é perpendicular ao plano.



Dipolo elétrico em um campo elétrico

Dipolo em um campo elétrico uniforme



$$\vec{F}_+ = +q\vec{E} \quad \vec{F}_- = -q\vec{E}$$

A resultante das forças sobre o dipolo é **nula**

$$\vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0$$

O torque resultante sobre o dipolo em relação à origem é diferente de zero

$$\vec{\tau} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- \quad \otimes \hat{z}$$

$$\tau = |\vec{\tau}| = 2qEa \sin \theta = pE \sin \theta \quad (p = 2aq) - \text{Momento de dipolo elétrico}$$

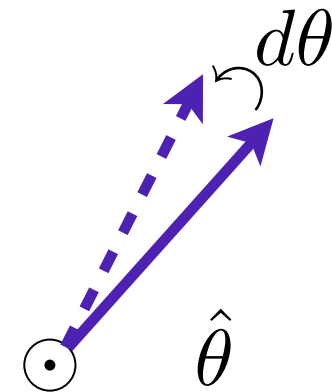
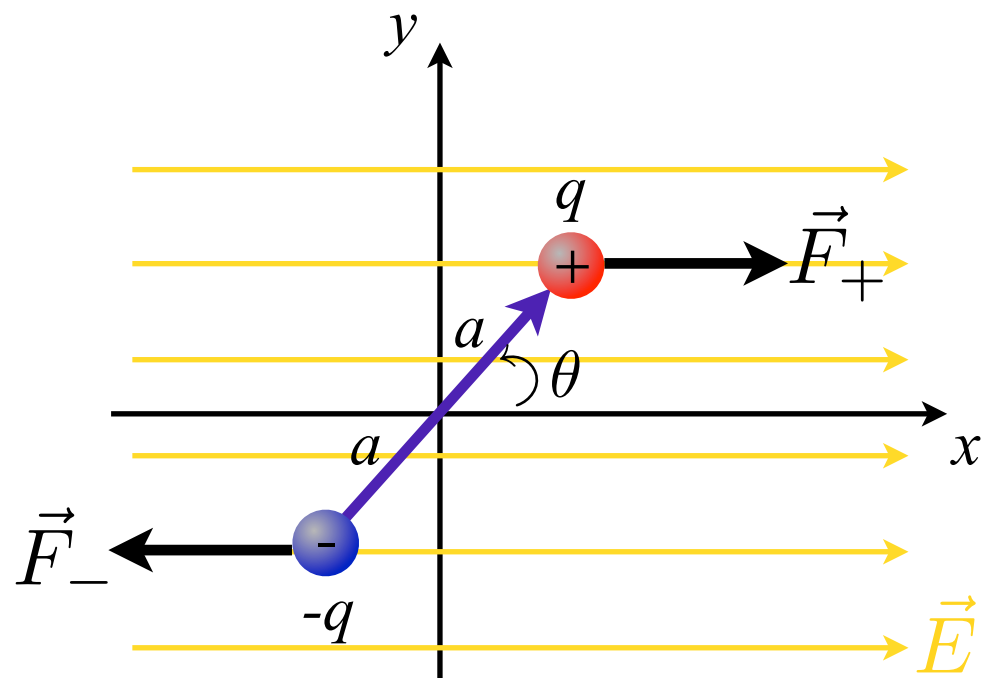
$$\vec{p} = 2aq [\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}]$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}} \quad \otimes \hat{z}$$

O momento de dipolo se alinha na direção e sentido do campo

Energia potencial de um dipolo elétrico

Trabalho feito pelo campo para rodar um dipolo em um campo elétrico uniforme



O trabalho feito pelo campo para girar o dipolo de um ângulo infinitesimal $d\theta$

$$dW = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = -pE \sin \theta d\theta$$

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} dW = - \int_{\theta_0}^{\theta} pE \sin \theta' d\theta' = -pE \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta' d\theta' = pE [\cos \theta - \cos \theta_0]$$

$$\Delta U = U(\theta) - U(\theta_0) = -pE [\cos \theta - \cos \theta_0] \quad \text{Escolhendo } U(\theta_0 = 90^\circ) = 0$$

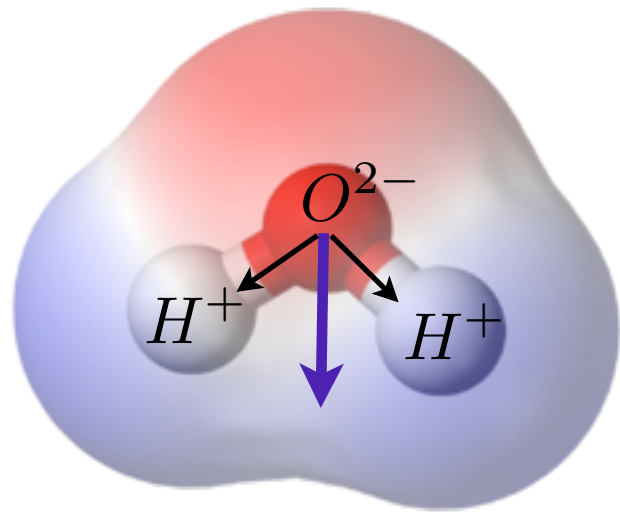
Escolha de origem para energia potencial

$$U(\theta) = -pE \cos \theta$$

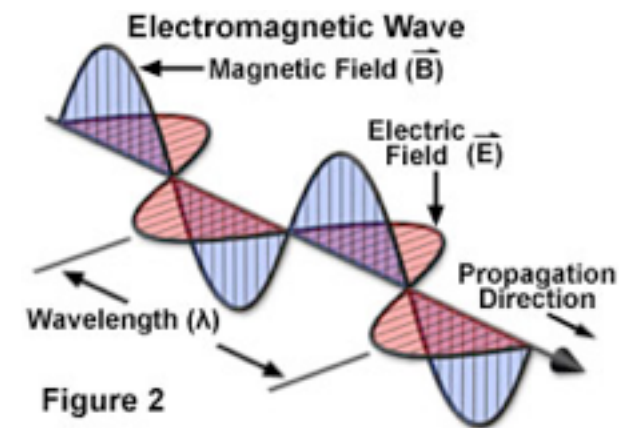
Micro-ondas

Micro-ondas

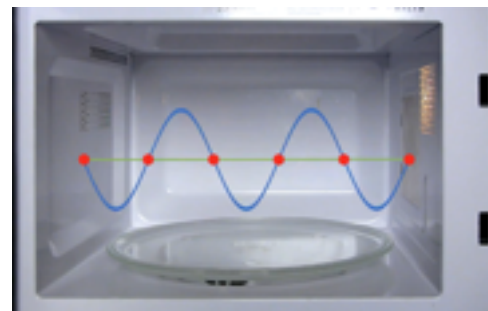
Na presença de um campo de micro-ondas (que varia no tempo)



$$\vec{E}(t) = E_0 \cos \omega t$$



As moléculas polares oscilam e aumentam a energia térmica do sistema



<http://www.geek.com/news/how-microwave-ovens-work-1499295/>